

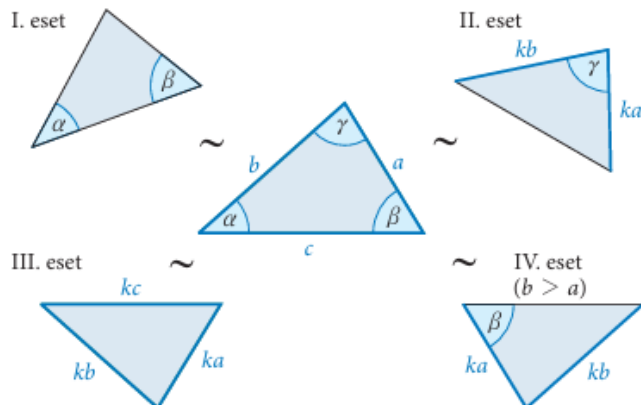
HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGA

ELMÉLET

Sok feladat megoldását elősegíti a következő négy szükséges és elégséges feltétel, amelyeket a háromszögek hasonlósági alapeseteinek nevezünk. (Az ábra azt mutatja meg, hogy a középső háromszög oldalai, illetve szögei milyen kapcsolatban vannak a körülötte álló háromszögek egyes alkotórészeivel.)

Ha két háromszögben

- két-két szög egyenlő nagyságú, akkor ez a két háromszög hasonló (I. eset);
- két-két oldal hosszának aránya és az általuk közbezárt szög nagysága egyenlő, akkor ez a két háromszög hasonló (II. eset);
- a három oldal hosszának aránya páronként egyenlő, akkor ez a két háromszög hasonló (III. eset);
- két-két oldal hosszának aránya és a nagyobbikkal szemben fekvő szög nagysága egyenlő, akkor ez a két háromszög hasonló (IV. eset).



FELADATOK

Egy háromszög két oldala: $a = 3,4$ cm, $b = 5,2$ cm, az általuk közbezárt szög: $\gamma = 68,4^\circ$. Ezt a háromszöget középpontosan nagyítjuk a 2,5-szeresére, majd a nagyított képet tükrözzük egy egyenesre. Hasonlítsuk össze a tükrözés után kapott háromszöget az eredetivel!

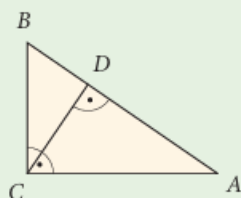
Megoldás

A középpontos nagyítás során kapott háromszög oldalainak hossza és szögeinek nagysága nem változik az egyenesre való tükrözéssel, csak a körüljárási iránya változik meg. Tehát a tükrözés után kapott háromszög oldalainak hossza 2,5-szer akkora, mint az eredeti háromszög oldalaié, a szögei pedig ugyanakkorák, mint az eredeti háromszög szögei. Az eredeti és a tükrözés után kapott háromszög **hasonló**, a hasonlóságuk aránya 2,5.

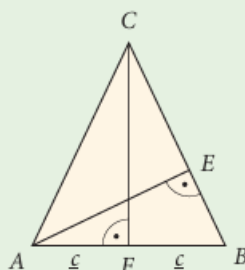
Tehát $a' = 2,5 \cdot 3,4 = 8,5$ (cm), $b' = 2,5 \cdot 5,2 = 13$ (cm), $c' = 2,5 \cdot c$ (cm), $\gamma' = \gamma = 68,4^\circ$, $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$.

2 Keress az ábrán hasonló háromszögeket! Indokold, hogy miért hasonlók!

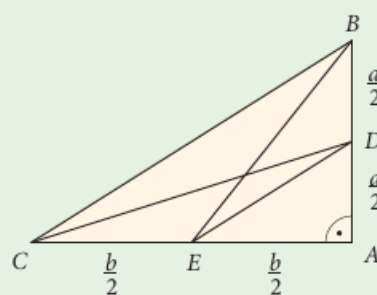
a)



b)



c)



Megoldás:

a)

A keresett hasonló háromszögek: $\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ACD$

Az indoklás (szögek egyenlősége alapján):

- A nagy $\triangle ABC$ derékszögű háromszög, melynek derékszöge a C csúcsnál található ($\angle BCA = 90^\circ$).
- A rajzon jelölt $\angle BDC = 90^\circ$ miatt a CD szakasz a háromszög átfogóhoz tartozó magassága.
- Ha elnevezzük az $\triangle ABC$ háromszög A csúcsánál lévő szögét α -nak, akkor a B csúcsnál lévő szög: $\beta = 90^\circ - \alpha$
- A magasságvonal által kapott két kisebb háromszöget vizsgálva:
 - A $\triangle CBD$ háromszögben $\angle BDC = 90^\circ$ és $\angle CBD = \beta$, így a harmadik szög: $\angle BCD = 180^\circ - 90^\circ - \beta = \alpha$.
 - A $\triangle ACD$ háromszögben $\angle ADC = 90^\circ$ és $\angle CAD = \alpha$, így a harmadik szög: $\angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = \beta$.
- Mivel mindhárom háromszög belső szögei megegyeznek (α , β és 90°), a háromszögek a szögek egyenlősége miatt hasonlóak.

b)

A keresett hasonló háromszögek: $\triangle AFC \sim \triangle BFC \sim \triangle AEC$

Az indoklás (szimmetria és szögek egyenlősége alapján):

- Az alaprajzon látható, hogy CF merőleges AB -re ($\angle CFA = \angle CFB = 90^\circ$), és felezi azt, hiszen $AF = FB = c$.
- Ezért a CF szakasz szimmetriatengely, vagyis a két belső derékszögű háromszög teljesen egybevágó: $\triangle AFC \cong \triangle BFC$.
- Mivel minden egybevágó alakzat egyben hasonló is (1:1 arányban), így $\triangle AFC \sim \triangle BFC$.
- Nézzük az $\triangle AEC$ háromszöget: a rajzon jelölt $\angle AEC$ tompaszög megegyezik a $\triangle AFC$ vagy $\triangle BFC$ valamely külső szögével, így a rögzített merőlegességek és a közös szögek miatt további rész-hasonlóságok is leolvashatóak.

c)

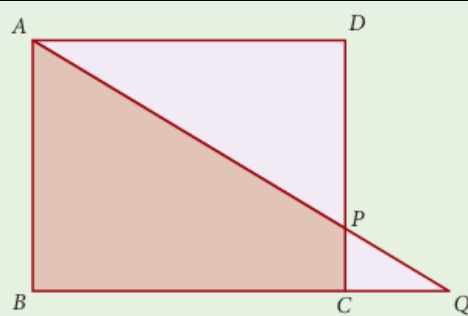
A keresett hasonló háromszögek: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

Az indoklás (oldalak aránya és közös szög alapján):

- A nagy $\triangle ABC$ háromszögben a derékszög melletti befogók hosszúsága:
 $AC = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$
 $AB = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$
 - A kicsi $\triangle ADE$ derékszögű háromszög befogóinak hossza a rajz alapján:
 $AD = \frac{a}{2}$
 $AE = \frac{b}{2}$
 - Hasonlítsuk össze a megfelelő oldalak arányát a két háromszögben:
 $\frac{AE}{AC} = \frac{\frac{b}{2}}{b} = \frac{1}{2}$
 $\frac{AD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$
 - Mivel a két oldalpár aránya megegyezik ($\frac{1}{2}$), és az általuk közrefogott A csúcsnál lévő szög mindkét háromszögben közös, a két háromszög a megfelelő oldalak arányának egyezősége miatt hasonló.
-

3 Az $ABCD$ téglalapban a P pont a CD oldal C -hez közelebbi negyedelőpontja. Az AB oldal hossza 8 cm, a BC oldal hossza 10 cm.

- Keress az ábrán hasonló háromszögeket! Indokold, miért hasonlók, a hasonlóság melyik alapesete teljesül?
- Mekkora a CP és mekkora a PD távolság?
- Mekkora a QC távolság?



Megoldás:

a) Hasonló háromszögek

A keresett hasonló háromszögek: $\triangle ADP \sim \triangle QCP$

Az indoklás (a hasonlóság alapesete: két szög egyezősége):

- A P csúcsnál lévő szögek csúcsszögek (szemköztiek), így egyenlők: $\angle APD = \angle QPC$.
- Mivel $ABCD$ egy téglalap, a D és C csúcsoknál derékszög van: $\angle ADP = \angle QCP = 90^\circ$.
- Mivel két-két belső szögük megegyezik, a két háromszög a szögek egyenlősége miatt hasonló.

b) CP és PD távolság

A feladat szövege szerint a P pont a CD oldal C -hez közelebbi negyedelőpontja.

Ez azt jelenti, hogy a CD szakaszt 4 egyenlő részre osztjuk, és ebből 1 rész esik a C felőli oldalra:

$$CP = \frac{1}{4} \cdot CD = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \text{ cm}$$

A maradék 3 rész adja a PD távolságot:

$$PD = \frac{3}{4} \cdot CD = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6 \text{ cm}$$

c) QC távolság

Használjuk fel az a) pontban bizonyított $\triangle ADP \sim \triangle QCP$ hasonlóságot!

A megfelelő oldalak aránya a két háromszögben megegyezik:

$$\frac{QC}{AD} = \frac{CP}{PD}$$

Helyettesítsük be az ismert adatokat ($AD = 10 \text{ cm}$, $CP = 2 \text{ cm}$, $PD = 6 \text{ cm}$):

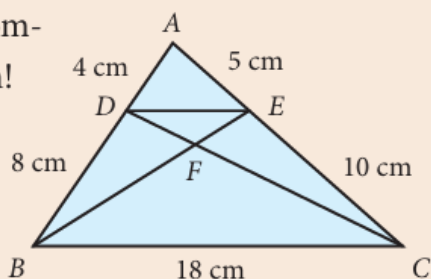
$$\frac{QC}{10} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{QC}{10} = \frac{1}{3}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt 10-zel:

$$QC = \frac{10}{3} \approx 3,33 \text{ cm}$$

1 📡 Keres hasonlóságháromszögeket az ábrán! Indokold, hogy miért hasonlók, és állapítsd meg a hasonlóságuk arányát is!



Megoldás:

1. A hasonló háromszög-pár keresése és az oldalak meghatározása

A nagy $\triangle ABC$ háromszög teljes oldalhosszúságai az ábra alapján:

$$AB = AD + DB = 4 + 8 = 12 \text{ cm}$$

$$AC = AE + EC = 5 + 10 = 15 \text{ cm}$$

$$BC = 18 \text{ cm}$$

A kis $\triangle ADE$ háromszög ismert oldalhosszúságai:

$$AD = 4 \text{ cm}$$

$$AE = 5 \text{ cm}$$

2. Az indoklás és a hasonlóság bizonyítása

Vizsgáljuk meg a megfelelő oldalak arányát a $\triangle ABC$ és a $\triangle ADE$ háromszögekben!

- Az A csúcsnál lévő szög mindkét háromszögben közös: $\angle DAE = \angle BAC$.
- Nézzük meg a szöget közrefogó oldalak arányát:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Mivel két-két oldalpár aránya megegyezik, és az általuk közbezárt szög egyenlő, ezért a két háromszög hasonló (a háromszögek hasonlóságának alapesete alapján):

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

3. A hasonlóság arányának meghatározása

- Ha a nagyobb háromszöget viszonyítjuk a kisebbhez (k_1):

$$k_1 = \frac{AB}{AD} = \frac{12}{4} = 3$$

(Azaz a nagy háromszög minden oldala pontosan 3-szor akkora, mint a kis háromszögé.)

- Ha a kisebb háromszöget viszonyítjuk a nagyobbhoz (k_2):

$$k_2 = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

4. A hiányzó DE oldal kiszámítása

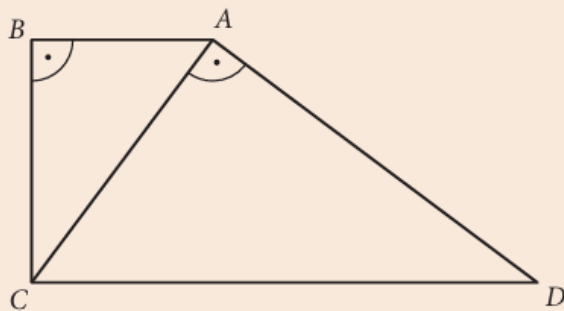
A hasonlóság arányát felhasználva kiszámíthatjuk a kis háromszög harmadik oldalát is:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$$

$$DE = \frac{BC}{3} = \frac{18}{3} = 6 \text{ cm}$$

2 (Érettségi feladat nyomán)

Két derékszögű háromszöget egy-egy oldalukkal egymáshoz illesztettünk az ábrának megfelelően.



Így az $ABCD$ derékszögű trapézt kaptuk.

a) Igazold, hogy az ABC és a CAD háromszög hasonló!

Legyen $AB = 9 \text{ cm}$, $AC = 15 \text{ cm}$.

b) Számítsd ki a trapéz kerületét!

c) Számítsd ki a trapéz területét!

Megoldás:

a) Hasonlóság igazolása

Az indokláshoz keressünk egyenlő belső szögeket a két háromszögben:

- A feladat szövege és jelölése alapján mindkét háromszög derékszögű:
 $\angle ABC = 90^\circ$
 $\angle CAD = 90^\circ$
Tehát: $\angle ABC = \angle CAD = 90^\circ$.
- Mivel az összeillesztéssel kapott $ABCD$ alakzat egy derékszögű trapéz, ezért az AB alap és a CD alap párhuzamos egymással ($AB \parallel CD$).
- Az AC szakasz mint metsző egyenes két váltószöget (belső alternáló szöget) határoz meg a párhuzamos egyenesek között, amelyek nagysága megegyezik:
 $\angle BAC = \angle ACD$

Mivel a $\triangle ABC$ és $\triangle CAD$ háromszögekben két-két belső szög megegyezik, a két háromszög a szögek egyenlősége miatt hasonló:

$$\triangle ABC \sim \triangle CAD$$

b) Trapéz területe

Kiindulási adatok: $AB = 9$ cm, $AC = 15$ cm.1. Határozzuk meg a BC oldal hosszát a $\triangle ABC$ derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel:

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = \mathbf{12 \text{ cm}}$$

2. Használjuk fel az a) pontban igazolt $\triangle ABC \sim$ $\triangle CAD$ hasonlóságot a hiányzó oldalakhoz!

Írjuk fel a megfelelő oldalak arányát (a derékszöggel szemközti átfogók és a megfelelő befogók között):

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \implies \frac{AD}{15} = \frac{15}{9} \implies AD = \frac{15 \cdot 15}{9} = \frac{225}{9} = \mathbf{25 \text{ cm}}$$

$$\frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB} \implies \frac{CD}{12} = \frac{15}{9} \implies CD = \frac{12 \cdot 15}{9} = \frac{180}{9} = \mathbf{20 \text{ cm}}$$

3. A trapéz kerülete (K) a négy határoló oldal összege:

$$K = AB + BC + CD + AD = 9 + 12 + 20 + 25 = \mathbf{66 \text{ cm}}$$

c) Trapéz kerülete

A derékszögű trapéz területe (T) kiszámítható a két párhuzamos alap (AB és CD)valamint a rájuk merőleges magasság ($BC = 12$ cm) segítségével:

$$T = \frac{AB + CD}{2} \cdot BC$$

Helyettesítsük be a kiszámított értékeket:

$$T = \frac{9 + 20}{2} \cdot 12 = \frac{29}{2} \cdot 12 = 29 \cdot 6 = \mathbf{174 \text{ cm}^2}$$

$$T = T_{ABC} + T_{CAD} = \frac{9 \cdot 12}{2} + \frac{15 \cdot 20}{2} = 54 + 150 = \mathbf{174 \text{ cm}^2}$$

3 (Kompetenciamérés, 2003)

Egy építész egy 280 méter magas épület 1,4 méteres modelljét tesztelte különböző szélerősségek mellett. Arra lett figyelmes, hogy a modell teteje valamelyest rezeg. A modell tengelye a csúcsánál 1 cm-t lengett ki a függőleges irányhoz képest. Ezek alapján mennyi lenne a tesztnek megfelelő időjárási körülmények mellett a valódi épület kilengése?

Megoldás:

A feladatban szereplő adatok:

A valódi épület magassága: $H_{\text{valódi}} = 280 \text{ m}$

A modell magassága: $H_{\text{modell}} = 1,4 \text{ m}$

A modell csúcsának kilengése: $d_{\text{modell}} = 1 \text{ cm}$

1. A hasonlóság arányának (k) meghatározása

A modell és a valódi épület geometriailag hasonlóak egymáshoz.

Számítsuk ki a hasonlósági arányt a magasságok hányadosaként:

$$k = \frac{H_{\text{valódi}}}{H_{\text{modell}}} = \frac{280 \text{ m}}{1,4 \text{ m}} = \mathbf{200}$$

(Ez azt jelenti, hogy a valódi épület minden lineáris mérete pontosan 200-szorosa a modellének.)

2. A valódi épület kilengésének kiszámítása

A kilengés szintén egy egyenes vonalú (lineáris) méret, így a hasonlóság miatt a valódi épület kilengése is a hasonlósági aránynak megfelelően változik:

$$d_{\text{valódi}} = d_{\text{modell}} \cdot k$$

$$d_{\text{valódi}} = 1 \text{ cm} \cdot 200 = \mathbf{200 \text{ cm}}$$

Végeredmény

Váltsuk át a kapott eredményt méterbe a könnyebb értelmezhetőség kedvéért:

$$d_{\text{valódi}} = \mathbf{2 \text{ m}}$$

A tesztnek megfelelő időjárási körülmények között a valódi épület kilengése **2 méter** lenne.